

De Dold-Kan correspondentie

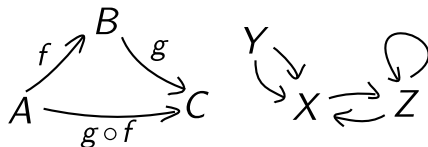
$$\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \simeq \mathbf{sAb}$$

Joshua Moerman

Begeleid door Moritz Groth

Categorieën

Een *categorie* **C** bestaat uit



met *compositie* $- \circ -$, zodat

- ▶ er is een *identiteit* $\mathbf{id}_C : C \rightarrow C$ en
- ▶ compositie is associatief.

Voorbeelden

Set objecten: verzamelingen
pijlen: functies

Ab objecten: abelse groepen
pijlen: groupshomomorfismes

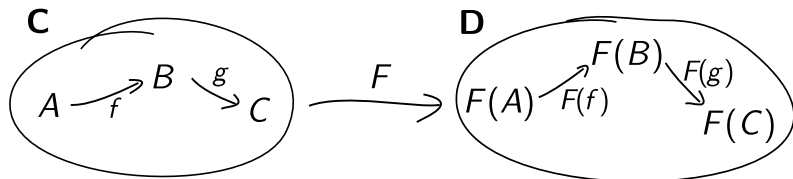
4

$$\begin{array}{ccc} *_1 & \xrightarrow{a} & *_2 \\ \downarrow f & & \downarrow b \\ *_3 & \xrightarrow{g} & *_4 \end{array}$$

met $ba = gf$.

Functors

Een *functor* $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ is een functie op objecten én pijlen.



Zodat

- ▶ $F(\mathbf{id}_C) = \mathbf{id}_{F(C)}$ en
- ▶ $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Voorbeeld functor

Voor een verzameling V definieer

$$\mathbb{Z}[V] = \{\phi : V \rightarrow \mathbb{Z} \mid \phi(v) \neq 0 \text{ voor eindig veel } v\}.$$

Voor een functie $f : V \rightarrow W$ definieer

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[f] : \mathbb{Z}[V] &\rightarrow \mathbb{Z}[W] \\ \mathbb{Z}[f](\phi) &= \sum_v \phi(v) \chi_{\{f(v)\}}.\end{aligned}$$

Dit is een functor: $\mathbb{Z}[-] : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

Voorbeeld functor

Definieer $F : \mathbf{4} \rightarrow \mathbf{Ab}$ als volgt:

$$F(*_1) = F(*_2) = F(*_3) = F(*_4) = \mathbb{Z}$$

en op pijlen:

$$F(f)(n) = 4n$$

$$F(g)(n) = 3n$$

$$F(a)(n) = 6n$$

$$F(b)(n) = 2n.$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 6} & \mathbb{Z} \\ \downarrow \times 4 & & \downarrow \times 2 \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 3} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Compositie is behouden,
want het diagram
commuteert.

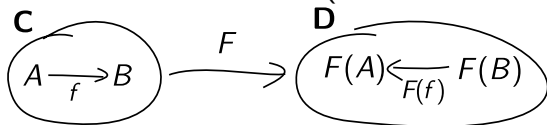
Samenvattend

- ▶ Categorie $\stackrel{D}{=}$ objecten + pijlen.
- ▶ Functor $\stackrel{D}{=}$ pijl tussen categorieën.
- ▶ Functor \sim Constructies.
- ▶ Functor \sim Diagrammen.

Samenvattend

- ▶ Categorie $\stackrel{D}{=}$ objecten + pijlen.
- ▶ Functor $\stackrel{D}{=}$ pijl tussen categorieën.
- ▶ Functor \sim Constructies.
- ▶ Functor \sim Diagrammen.

F is *contravariant* (notatie $F : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{D}$) als



$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Belangrijke categorie in mijn scriptie

- △ objecten: $[n] = \{0, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$
pijlen: monotoon stijgende functies.

Voorbeeld

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ zijn er pijlen

- ▶ $\delta_i : [n] \hookrightarrow [n+1]$ slaat i over $(0 \leq i \leq n)$
- ▶ $\sigma_i : [n+1] \twoheadrightarrow [n]$ bereik i twee keer $(0 \leq i < n)$

Belangrijke categorie in mijn scriptie

- Δ objecten: $[n] = \{0, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$
pijlen: monotoon stijgende functies.

Lemma

Elke pijl in Δ is een compositie van

- ▶ $\delta_i : [n] \hookrightarrow [n+1]$ slaat i over $(0 \leq i \leq n)$
- ▶ $\sigma_i : [n+1] \twoheadrightarrow [n]$ bereik i twee keer $(0 \leq i < n)$

Belangrijke categorie in mijn scriptie

- Δ objecten: $[n] = \{0, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$
pijlen: monotoon stijgende functies.

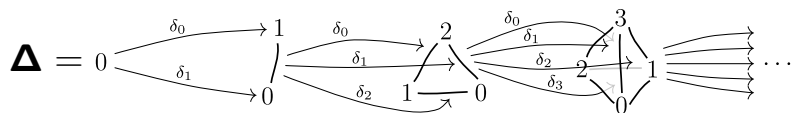
Lemma

Elke pijl in Δ is een compositie van

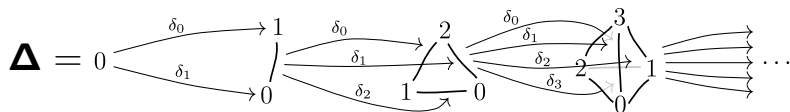
- ▶ $\delta_i : [n] \hookrightarrow [n+1]$ slaat i over ($0 \leq i \leq n$)
- ▶ $\sigma_i : [n+1] \twoheadrightarrow [n]$ bereik i twee keer ($0 \leq i < n$)

Dus $\Delta = [0] \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} [1] \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} [2] \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} [3] \dots$

Belangrijke categorie in mijn scriptie



Belangrijke categorie in mijn scriptie



Lemma

De cosimpliciale vergelijkingen gelden:

$$\begin{aligned} \delta_j \delta_i &= \delta_i \delta_{j-1}, & \text{if } i < j, \\ \sigma_j \delta_i &= \delta_i \sigma_{j-1}, & \text{if } i < j, \\ \sigma_j \delta_j &= \sigma_j \delta_{j+1} = \mathbf{id}, \\ \sigma_j \delta_i &= \delta_{i-1} \sigma_j, & \text{if } i > j + 1, \\ \sigma_j \sigma_i &= \sigma_i \sigma_{j+1}, & \text{if } i \leq j. \end{aligned}$$

$$\Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

$$A : \mathbf{\Delta}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

$$A := A_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{A(\delta_0)} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{A(\delta_1)} \end{array} A_1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} A_2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \dots$$

De categorie **sAb**

Objecten *Simpliciaal abelse groepen* A

preciezer: functoren $A : \mathbf{\Delta}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$

Pijlen *Natuurlijke transformaties*

preciezer: $\phi : A \rightarrow B$ bestaat uit $\phi_n : A_n \rightarrow B_n$

zodat

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{A(f)} & A_m \\ \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_m \\ B_n & \xrightarrow{B(f)} & B_m \end{array}$$

voor alle $f : [m] \rightarrow [n]$.

De categorie **Ch(Ab)**

Objecten *Ketencomplexen* C

preciezer: collectie abelse groepen C_n en
groepshomomorfismes $\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$ zodat
 $\partial \circ \partial = 0$

Pijlen *Ketenafbeeldingen*

preciezer: $\phi : C \rightarrow D$ bestaat uit $\phi_n : C_n \rightarrow D_n$
zodat

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n \\ \downarrow \phi_{n+1} & & \downarrow \phi_n \\ D_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & D_n \end{array}$$

sAb lijkt op Ch(Ab)

Simpliciaal abelse groepen:

$$A_0 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} A_1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} A_2 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} A_3 \dots$$

met de 5 vergelijkingen

Ketencomplexen:

$$C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow C_2 \leftarrow \dots$$

met $\partial \circ \partial = 0$

sAb lijkt op Ch(Ab)

Simpliciaal abelse groepen:

$$A_0 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} A_1 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} A_2 \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} A_3 \dots$$

met de 5 vergelijkingen

Ketencomplexen:

$$C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow C_2 \leftarrow \dots$$

met $\partial \circ \partial = 0$

sAb heeft meer structuur?

De Dold-Kan correspondentie

$$\mathbf{sAb} \simeq \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$$

De Dold-Kan correspondentie

$$N : \mathbf{sAb} \rightleftarrows \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) : K$$

$$\begin{array}{ll} \text{Zodat} & \forall C \in \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) : N(K(C)) \cong C \\ \text{en} & \forall A \in \mathbf{sAb} : K(N(A)) \cong A. \end{array}$$

De Dold-Kan correspondentie

$$N : \mathbf{sAb} \rightleftarrows \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) : K$$

$$\begin{array}{ll} \text{Zodat} & \forall C \in \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) : N(K(C)) \cong C \\ \text{en} & \forall A \in \mathbf{sAb} : K(N(A)) \cong A. \end{array}$$

N is in zekere zin surjectief: $\forall C \in \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ is er een $A \in \mathbf{sAb}$ met $N(A) \cong C$.

Eerste gok

Definieer $M : \mathbf{sAb} \rightarrow \mathbf{Ch(Ab)}$ met $M(A)_n = A_n$.

Eerste gok

Definieer $M : \mathbf{sAb} \rightarrow \mathbf{Ch(Ab)}$ met $M(A)_n = A_n$.

Zij $C = \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots$

Is er een A zodat $M(A) \cong C$?

M.a.w. $A_0 \cong \mathbb{Z}$ en $A_1 \cong 0$, kan dat?

Eerste gok

Definieer $M : \mathbf{sAb} \rightarrow \mathbf{Ch(Ab)}$ met $M(A)_n = A_n$.

Zij $C = \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots$

Is er een A zodat $M(A) \cong C$?

M.a.w. $A_0 \cong \mathbb{Z}$ en $A_1 \cong 0$, kan dat?

Nee! Want $A_0 \xrightarrow{A(\sigma_0)} A_1$ is injectief!

(want $\sigma_0 \delta_0 = \mathbf{id}$, dus $A(\delta_0)A(\sigma_0) = \mathbf{id}$)

Definities

Zij $A \in \mathbf{sAb}$

$x \in A_n$ heet een *n-simplex*

$x \in A_n$ is *gedegenerereerd* als $x = A(\sigma_i)(y)$ voor een zekere i en y .

De juiste constructie

Zij $A \in \mathbf{sAb}$, definieer

$$N(A)_n = \bigcap_{i=1}^n \ker(A(\delta_i))$$
$$\partial = A(\delta_0)$$

De juiste constructie

Zij $A \in \mathbf{sAb}$, definieer

$$N(A)_n = \bigcap_{i=1}^n \ker(A(\delta_i))$$
$$\partial = A(\delta_0)$$

Lemma

$x \in N(A)_n$ is niet-gedegeneerd.

Lemma

$$A_n = N(A)_n \oplus D_n(A).$$

Voorbeeld

Definieer de volgende simpliciaal abelse groep:

$$A_n = \mathbb{Z}$$
$$A(\delta_i) = A(\sigma_i) = \mathbf{id}.$$

Voorbeeld

Definieer de volgende simpliciaal abelse groep:

$$A_n = \mathbb{Z}$$
$$A(\delta_i) = A(\sigma_i) = \mathbf{id}.$$

$$N(A) = \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots .$$

$$N : \mathbf{sAb} \rightleftarrows \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) : K$$

$$N : \mathbf{sAb} \rightleftharpoons \mathbf{Ch(Ab)} : K$$

Vragen?